Koordinatenform

Spickzettel Aufgaben Lösungen PLUS Lernvideos

Eine **Ebene** im dreidimensionalen Raum kann durch eine lineare Gleichung beschrieben werden. Für eine solche Ebenengleichung in **Koordinatenform** werden vier Parameter benötigt:

$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$$

Hierbei versteht man unter

- $n_1,\ n_2,\ n_3$ die Koordinaten eines **Normalenvektors** der Ebene E,
- d einen Parameter, der mit Hilfe einer Punktprobe mit den Koordinaten eines Punktes aus der Ebene ermittelt werden kann.

Hast du anstelle des Normalenvektors $\vec{n}$ zwei Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Ebene gegeben, so gibt es zwei Möglichkeiten, einen Normalenvektor zu bestimmen:

- **Skalarprodukt**: Löse die Gleichungen $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$,
- **Kreuzprodukt**: Berechne $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Bedenke, dass eine Ebene immer mehrere Normalenvektoren hat, die aber jeweils voneinander linear abhängig sind, d.h. sie unterscheiden sich lediglich in ihrere Länge, aber nicht in ihrer Richtung.

Beispiel

Gegeben ist der Punkt $P(1 \mid 1 \mid 7)$ und der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene E.

Die Angaben kannst du in die allgemeine Koordinatenform einer Ebenengleichung einsetzen und erhältst so folgende Gleichung:

$$E: 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = d$$

Weiterhin ist der Punkt $P(1 \mid 1 \mid 7)$ gegeben, der in der Ebene liegt. Dessen Koordinaten kannst du nun verwenden, um den Parameter d zu bestimmen:

$$E: 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 7 = 3 + 2 + 7 = 12 = d$$

Daraus erhältst du die vollständige Koordinatengleichung der Ebene:

$$E: 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 12$$